ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

o0o

NGUYỄN ĐÌNH SỰ

TÍNH ỔN ĐỊNH HÓA CỦA LỚP HỆ DƯƠNG PHÂN THỨ

THÁI NGUYÊN, 10/2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

o0o

NGUYỄN ĐÌNH SỰ

TÍNH ỔN ĐỊNH HÓA CỦA LỚP HỆ DƯƠNG PHÂN THỨ

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 8 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
TS. MAI VIẾT THUẬN

THÁI NGUYÊN, 10/2018

Mục lục

Một số ký hiệu và chữ viết tắt

$\mathbb{R}, \mathbb{R}^+$	tập các số thực, số thực không âm tương ứng
$\mathbb{R}^n$	không gian vectơ Euclide thực $n-$chiều
$\mathbb{R}^{n\times r}$	không gian các ma trận thực cỡ $(n \times r)$
$C([a,b],\mathbb{R}^n)$	không gian các hàm liên tục trên $[a,b]$, nhận giá trị trong $\mathbb{R}^n$
A^T	ma trận chuyển vị của ma trận A
$A = (A)_{ij}$	phần tử A_{ij} của ma trận A
I	ma trận đơn vị
$A \geq 0$	A là một ma trận không âm
$A \geq B$	$A - B \geq 0$
$A > 0$	A là một ma trận dương
${}_{t_0}I_t^\alpha$	toán tử tích phân phân thứ Riemann-Liouville cấp α
${}_{t_0}^{RL}D_t^\alpha$	toán tử đạo hàm phân thứ Riemann-Liouville cấp α
${}_{t_0}^{C}D_t^\alpha$	toán tử đạo hàm phân thứ Caputo cấp α
$\square$	kết thúc chứng minh của định lí hoặc bổ đề

Lời nói đầu

Hệ động lực dương đã nhận được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà khoa học vì những ứng dụng của nó trong nhiều bài toán kỹ thuật (xem [9] và các tài liệu tham khảo trong đó) trong khoảng ba thập kỷ gần đây. Nói một cách hình tượng, một hệ động lực được gọi là hệ dương nếu các vectơ trạng thái và vectơ đầu ra của hệ là không âm khi các điều kiện ban đầu và đầu vào là không âm. Tính ổn định và ổn định hóa là một trong những tính chất định tính quan trọng của hệ động lực dương. Vì vậy, nó đã nhận được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà khoa học [3, 12, 14, 16, 18]. Chẳng hạn, bằng cách tiếp cận sử dụng phương pháp hàm Lyapunov kết hợp với bài toán quy hoạch tuyến tính, các tác giả trong [16] nghiên cứu bài toán ổn định hóa cho lớp hệ tuyến tính với điều khiển có hạn chế. Trong [12], một vài tiêu chuẩn cho tính dương và tính ổn định tiệm cận cho lớp hệ tuyến tính dương có trễ đã được đưa ra.

Mặt khác, nhiều nhà khoa học đã chỉ ra rằng nhiều hệ thống, chẳng hạn như các hệ thống điện từ, phân cực điện môi, các hệ thống viscoelastic [8], có thể được mô tả một cách chi tiết và tốt hơn bởi hệ phương trình vi phân phân thứ. Vì vậy hệ phương trình vi phân phân thứ đã nhận được nhiều sự quan tâm nghiên cứu (xem [1, 2, 12, 13, 14, 16, 18] và các tài liệu tham khảo trong đó). Đặc biệt, trong những năm gần đây, bài toán nghiên cứu tính ổn định và ổn định hóa các hệ động lực dương phân thứ là một bài toán quan trọng, thu hút sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà khoa học. Nhiều kết quả sâu sắc về bài toán này đã được công bố trên các tạp chí quốc tế uy tín (xem [5, 8, 10, 17]).

Trong tài liệu [8], các tác giả đã đưa ra một vài tiêu chuẩn cho tính ổn định hóa của một số lớp hệ tuyến tính dương không chắc chắn phân thứ Riemann-Liouville. Tuy nhiên như trong bình luận của một số nhà khoa học, việc dùng đạo hàm Riemann-Liouville để mô tả các hệ động lực trong thực tế thì gặp hạn chế do điều kiện ban đầu trong các bài toán giá trị đầu không có nhiều ý nghĩa vật lí. So với đạo hàm phân thứ Riemann-Liouville, đạo hàm Caputo dễ áp dụng cho các bài toán thực tế hơn vì điều kiện ban đầu của các mô hình sử dụng đạo hàm Caputo có ý nghĩa vật lí. Vì lí do đó, bằng cách sử dụng một số kỹ thuật tham khảo trong các tài liệu [8] và [17] chúng tôi nghiên cứu bài toán ổn định hóa cho một số lớp hệ tuyến tính dương không chắc chắn phân thứ Caputo. Các kết quả thu được là những đóng góp nhỏ nhưng có ý nghĩa khoa học của chúng tôi.

Luận văn được chia làm hai chương với những nội dung chính như sau:

Chương 1, chúng tôi trình bày một số khái niệm về giải tích phân thứ như tích phân và đạo hàm phân thứ Riemann–Liouville, tích phân và đạo hàm phân thứ Caputo. Sau đó, chúng tôi trình bày một số định lí tồn tại và duy nhất nghiệm. Công thức nghiệm của hệ phương trình vi phân tuyến tính phân thứ Caputo không thuần nhất cũng được chúng tôi trình bày trong chương này. Ngoài ra, phương pháp hàm Lyapunov để nghiên cứu tính ổn định cho hệ phương trình vi phân phân thứ phi tuyến tổng quát cũng được trình bày trong chương này.

Chương 2 của luận văn trình bày điều kiện cần và đủ để đảm bảo một hệ tuyến tính phân thứ Caputo là dương. Ngoài ra, chúng tôi cũng trình bày một số điều kiện đủ cho tính ổn định hóa của một số lớp hệ điều khiển tuyến tính phân thứ Caputo với điều khiển không có hạn chế và có hạn chế. Các kết quả của chương này được chúng tôi đưa ra bằng cách áp dụng các kỹ thuật chứng minh trong các bài báo [8] và [17] trong danh mục tài liệu tham khảo của luận văn.

Để hoàn thành luận văn này, ngoài sự nỗ lực học hỏi của bản thân, em đã nhận được rất nhiều sự quan tâm, giúp đỡ. Với tình cảm chân thành em xin gửi lời cảm ơn sâu sắc nhất tới TS. Mai Viết Thuận - người Thầy đã tận tình hướng dẫn, chỉ bảo, truyền đạt những kiến thức và kinh nghiệm quý báu cho em trong suốt quá trình học tập và hoàn thiện luận văn.

Em xin gửi lời cảm ơn đến các thầy cô giáo của trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, những người đã trực tiếp tham gia giảng dạy lớp Cao học Toán K10 khóa 2016 - 2018, các phòng ban chức năng, Khoa Toán - Tin trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã giúp đỡ và tạo điều kiện cho em trong thời gian học tập vừa qua.

Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành đến Ban giám Hiệu trường THPT Hiệp Hòa số 2, tập thể lớp K10, gia đình, bạn bè và đồng nghiệp đã luôn động viên, giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập và hoàn thành khóa luận này.

Thái Nguyên, ngày 02 tháng 10 năm 2018

Tác giả luận văn

NGUYỄN ĐÌNH SỰ

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Chương này trình bày một số kiến thức về giải tích phân thứ như tích phân Riemann-Liouville, đạo hàm phân thứ Caputo, đạo hàm phân thứ Riemann-Liouville, mối liên hệ giữa hai loại đạo hàm Caputo và Riemann-Liouville. Ngoài ra, chúng tôi cũng trình bày phương pháp hàm Lyapunov cho hệ phương trình vi phân phân thứ. Các kiến thức được trình bày trong chương này được chúng tôi tham khảo trong [1, 13, 15].

1.1. Giải tích phân thứ

1.1.1. Tích phân phân thứ

Trong mục này, chúng tôi trình bày sơ lược về khái niệm tích phân phân thứ. Khái niệm tích phân phân thứ là một mở rộng tự nhiên của khái niệm tích phân lặp thông thường.

Định nghĩa 1.1. Cho $\alpha > 0$ và $[a, b] \subset \mathbb{R}$, tích phân phân thứ Riemann-Liouville cấp α của hàm $x : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ được cho bởi:

$$ {}_{t_0}I_t^{\alpha} x(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} x(s) ds, t \in (a, b], $$

trong đó $\Gamma(.)$ là hàm Gamma xác định bởi $\Gamma(\alpha) = \int\limits_{0}^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt, \alpha > 0.$

Trong Định nghĩa 1.1 khi $\alpha = 0$ chúng ta quy ước ${}_{t_0}I_t^{\alpha} := I$ với I là toán tử đồng nhất. Sự tồn tại của tích phân phân thứ Riemann–Liouville cấp α với $0 < \alpha < 1$ được cho bởi định lí sau:

Định lí 1.1. *Giả sử* $x : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *là một hàm khả tích trên* $[a, b]$*. Khi đó, tích phân* ${}_{t_0}I_t^{\alpha}x(t)$ *tồn tại với hầu hết* $t \in [a, b]$*. Hơn nữa,* ${}_{t_0}I_t^{\alpha}x$ *cũng là một hàm khả tích.*

Ví dụ sau đây cho ta tích phân phân thứ của một số hàm cơ bản.

Ví dụ 1.1. (i) Cho $x(t) = (t-a)^{\beta}$, ở đây $\beta > -1$ và $t > a$. Với bất kì $\alpha > 0$, chúng ta có:

$$ {}_{t_0}I_t^{\alpha}x(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(t-a)^{\alpha+\beta}, t > a. $$

(ii) Cho $x(t) = e^{\lambda t}, \lambda > 0$. Với bất kì $\alpha > 0$, chúng ta có:

$$ {}_{t_0}I_t^{\alpha}x(t) = \lambda^{-\alpha}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{(\lambda t)^{\alpha+j}}{\Gamma(\alpha+j+1)}, t > 0. $$

1.1.2. Đạo hàm phân thứ

Định nghĩa 1.2. Cho trước một số thực dương α và một khoảng $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Đạo hàm phân thứ Riemann–Liouville cấp α của hàm $x : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ được cho bởi:

$$ {}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha}x(t) := \frac{d^n}{dt^n}\left[{}_{t_0}I_t^{n-\alpha}x(t)\right] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{n-\alpha-1}x(s)ds, $$

trong đó $n = [\alpha] + 1$ là số nguyên nhỏ nhất lớn hơn hoặc bằng α và $\frac{d^n}{dt^n}$ là đạo hàm thông thường cấp n.

Ví dụ 1.2. Cho hàm bước đơn vị (unit-step function):

$$ f(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu} \quad t \geq 0; \\ 0 & \text{nếu} \quad t < 0. \end{cases} $$

Bằng cách sử dụng Định nghĩa 1.2, ta tính đạo hàm phân thứ Riemann–Liouville cấp α của hàm $f(t)$ là:

$$ {}_{0}^{RL}D_t^{\alpha}f(t) = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}. $$

Trước khi trình bày điều kiện cho sự tồn tại của đạo hàm phân thứ Riemann–Liouville, chúng tôi nhắc lại một số kết quả sau:

Cho $[a, b]$ là một khoảng hữu hạn trong $\mathbb{R}$. $AC[a, b]$ là không gian các hàm tuyệt đối liên tục trên $[a, b]$. Kolmogorov và Fomin đã chỉ ra mối liên hệ giữa các hàm tuyệt đối liên tục và các hàm khả tích Lebesgue như sau:

$$f(t) \in AC[a, b] \Leftrightarrow f(t) = c + \int_a^t \varphi(s)ds \quad (\varphi(s) \in L(a, b)).$$

Do đó một hàm tuyệt đối liên tục $f(t)$ có đạo hàm $f'(t) = \varphi(t)$ hầu khắp nơi trên $[a, b]$.

Với $n \in \mathbb{N}$, ta định nghĩa lớp hàm $AC^n[a, b]$ như sau:

$$AC^n[a, b] = \{f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, (D^{n-1}f)(t) \in AC[a, b] \quad (D = \frac{d}{dt})\}.$$

Mệnh đề sau đây cho ta một số đặc tính của lớp hàm $AC^n[a, b]$.

Mệnh đề 1.1. *Không gian $AC^n[a, b]$ chứa tất cả các hàm $f(t)$ có dạng như sau:*

$$f(t) = {}_{t_0}I_t^{\alpha}\varphi(t) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k(t - t_0)^k,$$

trong đó $\varphi(t) \in L(a, b), c_k(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ là các hằng số tùy ý và

$${}_{t_0}I_t^{\alpha}\varphi(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_{t_0}^t (t - s)^{n-1}\varphi(s)ds.$$

Ngoài ra, từ các điều kiện trên ta có:

$$\varphi(s) = f^{(n)}(s), c_k = \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!}(k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Định lí sau cho ta một tiêu chuẩn cho sự tồn tại của đạo hàm phân thứ Riemann–Liouville.

Định lí 1.2. *Cho $\alpha \geq 0, n = [\alpha] + 1$. Nếu $f(t) \in AC^n[a, b]$, khi đó đạo hàm phân thứ ${}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha}f(t)$ tồn tại hầu khắp nơi trên $[a, b]$ và có thể được biểu diễn dưới dạng sau:*

$${}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha}f(t) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(t_0)}{\Gamma(1 + k - \alpha)}(t - t_0)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{t_0}^t \frac{f^{(n)}(s)ds}{(t - s)^{\alpha - n + 1}}.$$

Kết quả sau đây được suy ra trực tiếp từ Định lí 1.2.

Hệ quả 1.1. *Nếu $0 < \alpha < 1$ và $f(t) \in AC[a, b]$ thì*

$${}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}[\frac{f(t_0)}{(t - t_0)^{\alpha}} + \int_{t_0}^t \frac{f'(s)ds}{(t - s)^{\alpha}}].$$